Siła oporu lepkiego podczas spadku (tzw. siła oporu Stokesa)
oraz w oscylatorze harmonicznym tłumionym

Dwa klasyczne (i bardzo ważne!) problemy mechaniki – spadku swobodnego ciężarka w polu stałej siły grawitacji oraz drgającego bez tarcia ciężarka przyczepionego do sprężynki (vel wahadła) – zmodyfikujemy o obecność siły oporu lepkiego, tj. proporcjonalnej do prędkości ciała, np. siły oporu powietrza (jest to prawda w dość szerokim zakresie parametrów ruchu).

Stała proporcjonalności, oznaczana *k*, zawiera w sobie stałe materiałowe oraz kształt sprawiającego opór ciężarka – nie sam przekrój czynny na zderzenie z masą powietrza, ale jego aerodynamikę: zaostrzony i opływowy kształt o tym samym polu sprawia mniejszy opór niż płaski. Metody wyznaczania stałej *k* pozostawmy specjalistom, korzystającym w swej pracy z tunelu aerodynamicznego.

Na rozgrzewkę pójdzie łatwiejszy obliczeniowo przypadek.

1. Zanurzanie się ciężkiej kuleczki w pionowej rurce z gliceryną (albo skok na spadochronie)

Wybierzmy kierunek *x*, tak aby wskazywał nam kierunek tonięcia kuleczki – pionowo w dół. Rurka jest (o wiele) zbyt krótka, aby następowała znacząca zmiana ciśnienia hydrostatycznego gliceryny. Siła grawitacji tym bardziej jest stała na całej wysokości rurki. Na kuleczkę działają w naszym modelu następujące siły: siła ciężkości w kierunku $\hat{x}$, oraz dwie siły w kierunku $-\hat{x}$: wyporu oraz oporu lepkiego. Dynamiczne równanie ruchu przedstawia się zatem następująco:

$$m\ddot{x} = (m_k - m_{gl})\, g - k\,\dot{x} \quad .$$

Czynimy dodatkowe założenie, że masa kuleczki jest znacznie większa od masy wypartej przez nią gliceryny – siła wyporu jest do zaniedbania we wzorze. Również np. w przypadku skoku spadochroniarza w powietrzu jest to w pełni uzasadnione założenie, bowiem masa spadochroniarza jest wielokrotnie większa od masy powietrza, zajmowanego przez objętość równą objętości spadochroniarza. Tak więc, opuszczając m_{gl} (odtąd *m* będzie jedyną rozważaną masą – kuleczki, stąd niepotrzebny indeks) i przepisując równanie w zmiennej prędkości $v \equiv \dot{x}$, która będzie nas interesowała najbardziej, mamy

$$m\dot{v} = m\,g - k\,v$$
$$\dot{v} = g - \frac{k}{m}\,v = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right),$$

skąd, po przeniesieniu zawartości nawiasu na lewą stronę,

$$\frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{k}\right)} = -\frac{k}{m}\, dt$$

i po scałkowaniu po czasie od t_0 do *t* i po prędkości od $v(t_0) = v_0$ do $v(t) = v$, dostajemy

$$\ln\left(\tilde{v} - \frac{mg}{k}\right) \Big|_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}\, \tilde{t}\ \Big|_{t_0}^{t}$$

$$\ln \frac{v - \frac{mg}{k}}{v_0 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}(t - t_0)$$

i ostatecznie

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}(t - t_0)} .$$

Początkowo, prędkość kulki wynosi v_0 . Następnie, zależnie od tego, czy była ona większa czy mniejsza od jej ciężaru podzielonego przez stałą oporu, $\frac{mg}{k}$, kulka będzie hamować lub przyspieszać do asymptotycznej wartości granicznej, $\frac{mg}{k}$, z coraz mniejszym (niejednostajnym) przyspieszeniem. Nadmiar lub niedomiar prędkości kulki do $\frac{mg}{k}$ będzie malał („topniał”) wykładniczo, zgodnie z tempem klasycznej funkcji tłumienia (czy też rozpadu) $e^{-\lambda t}$.

Spadochroniarz, zrzucony z samolotu, nie będzie w polu grawitacji stale przyspieszał ku powierzchni ziemi, ale od pewnego momentu będzie poruszał się już ze stałą prędkością (w przybliżeniu 60 km/h). Siła oporu powietrza wzrasta proporcjonalnie do rosnącej prędkości człowieka, aż w końcu zrównoważy stałą siłę grawitacji, od którego to momentu – poddany zerowej wypadkowej sile – spadochroniarz już nie jest w stanie przyspieszać. Otwarcie spadochronu powoduje znaczący wzrost współczynnika oporu *k*, a co za tym idzie, znaczne zmniejszenie się prędkości granicznej $\frac{mg}{k}$. Wypuszczenie czaszy musi nastąpić na tyle wcześnie, żeby zdążyła się ona uformować, a następnie żeby prędkość spadochroniarza zdążyła zbliżyć się (zmniejszyć) do nowej skrajnej wartości jeszcze przed upadkiem na ziemię. Jest to nadal około 20 km/h, a zatem spadochroniarz musi przejść solidny trening, jak upadać na ziemię tak, aby przekoziołkować, zamieniając energię spadku na energię ruchu wirowego, a nie połamać sobie nóg.

2. Oscylator harmoniczny swobodny i tłumiony (ang. damped)

W analizie oscylatora harmonicznego spotykamy się z jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Ogólnie rzecz biorąc, równanie liniowe typu

$$a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = 0$$

ma dwa pierwiastki: rzeczywiste lub zespolone postaci $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, albo jeden podwójny (przypadek zdegenerowany), i rozwiązanie – zgodnie z regułami algebry – przyjmuje wówczas postać $A_1 e^{\lambda t} + A_2\, t\, e^{\lambda t}$, aby nie utracić ogólności rozwiązania (inaczej dostajemy tylko jedną stałą całkowania w miejsce dwóch).

Kiedy mamy do czynienia z ogólnym przypadkiem niezdegenerowanym, zatem $x \propto e^{\lambda t}$, wówczas $\dot{x} \propto \lambda\, e^{\lambda t}$, zaś $\ddot{x} \propto \lambda^2\, e^{\lambda t}$ i nasze równanie różniczkowe przyjmuje postać

$$\left(a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c\right) e^{\lambda t} = 0 \quad .$$

Rozwiązanie wyjściowego równania różniczkowego sprowadza się więc do rozwiązania równania kwadratowego na λ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \equiv \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad .$$

Degeneracja występuje w pojedynczym przypadku, gdy $\Delta = 0$; gdy Δ jest dodatnia, mamy dwa pierwiastki rzeczywiste, a gdy ujemna – dwa zespolone (o części rzeczywistej oraz urojonej). Paradoksalnie, klasyczne oscylacje wynikają właśnie z przypadku zespolonego (gdyż rzeczywisty prowadzi nas do funkcji wykładniczej, a nie harmonicznej). Obliczenia są przeprowadzane ogólnie, na liczbach zespolonych, jednak otrzymujemy w wyniku prawidłowe, czysto rzeczywiste rozwiązanie, gdy położymy $\Im x = 0$, czyli zażądamy znikania jego części urojonej. To da nam warunek na stałe całkowania.

2.1. Oscylator nietłumiony

Tę metodologię prześledzimy i nabierzemy w niej wprawy na prostym przypadku nietłumionego oscylatora harmonicznego. Technologia tego rozwiązania przyda nam się bardzo także w przypadku podtłumionym (2.2.c.).

Dynamiczne równanie ruchu jest szalenie proste i wygląda następująco (*k* oznacza stałą sprężystości sprężyny, dla współczynnika tłumienia wprowadzimy potem inne tradycyjne oznaczenie):

$$m\,\ddot{x} \;=\; -k\,x \;\Leftrightarrow\; \ddot{x}+{\omega_0}^2 x \;=\; 0 \quad ,$$

czyli sprężyna ściąga ciężarek ku położeniu równowagi z siłą wprost proporcjonalną do wychylenia z niego; przez ${\omega_0}^2$ oznaczyliśmy jak zawsze iloraz *k*/*m*; indeks 0 oznacza naturalną częstość (bez wpływu innych sił, tylko sprężystości sprężyny). Skoro ma być $x \propto \mathrm{e}^{\lambda\, t}$, to

$$\lambda^2 \;+\; {\omega_0}^2 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \;=\; \pm\sqrt{-{\omega_0}^2} \;=\; \pm\sqrt{-1}\sqrt{{\omega_0}^2} \;=\; \pm i\,\omega_0 \quad .$$

W rezultacie

$$x \;=\; A_1 \mathrm{e}^{i\,\omega_0 t} + A_2 \mathrm{e}^{-i\,\omega_0 t} \quad .$$

Obie amplitudy *A* są w ogólności zespolone; zapiszmy je w rozwiązaniu w postaci biegunowej (ich argumenty oznaczmy przez φ_1 oraz φ_2):

$$\begin{aligned} x \;&=\; |A_1|\mathrm{e}^{i\,\varphi_1}\mathrm{e}^{i\,\omega_0 t} + |A_2|\mathrm{e}^{i\,\varphi_2}\mathrm{e}^{-i\,\omega_0 t} \;=|A_1|\mathrm{e}^{i\,(\omega_0 t+\varphi_1)} \;+\; |A_2|\mathrm{e}^{i(-\omega_0 t+\varphi_2)} \\ &=\; |A_1|\,[\cos(\omega_0 t+\varphi_1) + i\,\sin(\omega_0 t+\varphi_1)] \;+\; |A_2|\,[\cos(-\omega_0 t+\varphi_2) + i\,\sin(-\omega_0 t+\varphi_2)] \\ &=\; |A_1|\cos(\omega_0 t+\varphi_1) + |A_2|\cos(-\omega_0 t+\varphi_2) \;+\; i\;[\,|A_1|\,\sin(\omega_0 t+\varphi_1) + |A_2|\sin(-\omega_0 t+\varphi_2)\,]\;. \end{aligned}$$

Żądamy czysto rzeczywistego rozwiązania:

$$|A_1|\,\sin(\omega_0 t+\varphi_1) + |A_2|\sin(-\omega_0 t+\varphi_2) \;\equiv\; 0 \quad ;$$

równość jest tożsamościowa, bo ma to być prawdą dla każdej chwili *t*. Ale, skoro sinus jest funkcją nieparzystą,

$$|A_1|\sin(\omega_0 t+\varphi_1)-|A_2|\sin(\omega_0 t-\varphi_2)\;\equiv\;0\;\Leftrightarrow\;|A_1|\sin(\omega_0 t+\varphi_1)\;\equiv\;|A_2|\sin(\omega_0 t-\varphi_2)\quad .$$

Jest to możliwe jedynie wówczas, gdy $|A_1| = |A_2|$ oraz $\varphi_1 = -\varphi_2$, a zatem, gdy amplitudy A_1 i A_2 są wzajemnie sprzężone. Wtedy zaś nasze rozwiązanie (nieznikająca, czyli rzeczywista część *x*) przyjmuje postać

$$x\;=\;|A|\cos(\omega_0 t+\varphi)+|A|\cos(-\omega_0 t-\varphi)\;=\;2|A|\cos(\omega_0 t+\varphi)\;=\;C\cos(\omega_0 t+\varphi)\quad ,$$

bo cosinus jest funkcją parzystą. *C* jest zwykłą, rzeczywistą amplitudą oscylatora, ω_0 jego naturalną (swobodną) częstością kołową, a $\varphi := \varphi_1 = -\varphi_2$ – jego fazą początkową. Tym samym doszliśmy do rozwiązania naszego równania różniczkowego i zidentyfikowaliśmy je jako ruch drgający oscylatora harmonicznego.

2.2. Oscylator tłumiony

W przypadku tłumienia, w dynamicznym równaniu ruchu występuje siła wprost proporcjonalna do minus prędkości ciężarka. Współczynnik tłumienia oznaczamy małą literą grecką γ . Mamy więc

$$m\ddot{x}\;+\;\gamma\,\dot{x}\;+\;k\,x\;=\;0\;\Leftrightarrow\;\ddot{x}\;+\;\frac{\gamma}{m}\dot{x}\;+\;\omega_0{}^2\;=\;0\quad .$$

A zatem szukamy rozwiązania równania kwadratowego $\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \omega_0{}^2 = 0$. Wyróżnik kwadratowy

$$\Delta\;=\;\frac{\gamma^2}{m^2}\;-\;4\,\omega_0{}^2\quad ,$$

skąd

$$\lambda_{1,2}\;=\;-\frac{\gamma}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\;-\;\omega_0{}^2}\quad .$$

Kombinację $\frac{\gamma}{2m}$ nazwiemy dla skrótu δ ; wówczas

$$\lambda_{1,2}\;=\;-\delta\;\pm\;\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\quad ,$$

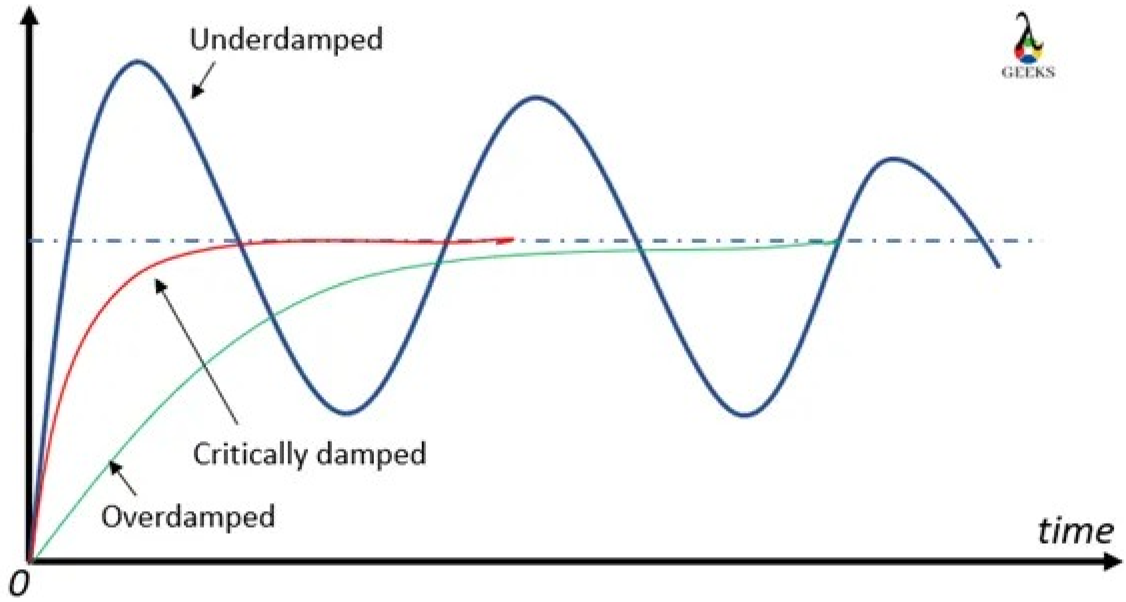
zaś nasze rozwiązanie na $x \propto e^{\lambda t}$ przyjmie postać $e^{-\delta t}\ e^{\pm\sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\,t}$. Pierwszy wyraz jest funkcją tłumienia (rozpadu) – a zatem czynnikiem wygaszającym (tłumiącym) dla drugiego czynnika, mniejszego (i słabiej rosnącego) od niego. Postać drugiego czynnika zależy zasadniczo od znaku wyrażenia pod pierwiastkiem. Mamy zatem trzy możliwości: wyrażenie podpierwiastkowe większe od zera, równe zero i mniejsze od zera.

2.2.a. Nadtłumienie (overdamping): $\delta^2 > \omega_0{}^2$

W tym przypadku będziemy mieli do czynienia z dwoma różnymi od siebie rozwiązaniami rzeczywistymi. Jeśli wartość pierwiastka – rzeczywistego, nieujemnego – w wyrażeniu na λ oznaczymy chwilowo małą literą grecką α , to mamy

$$x = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right) \ .$$

Wartość α $\left(\equiv\sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\right)$ jest mniejsza od samej δ , a zatem to człon tłumienia przed nawiasem nadaje ton całej funkcji – wytłumia wszelkie drgania. Jej przebieg zaznaczony jest na (zapożyczonej) grafice kolorem zielonkawym.



(grafika pochodzi ze strony lambdageeks.com)

2.2.b. Krytyczne tłumienie (critical damping): $\delta = \omega_0$

W tej sytuacji wyrażenie pod pierwiastkiem wynosi zero i zwykłe rozwiązanie na λ się degeneruje. Jak już wspominaliśmy, poszukujemy wówczas rozwiązania postaci

$A_1 e^{\lambda t} + A_2\, t\, e^{\lambda t}$. Podwójny pierwiastek równania kwadratowego wynosi $\lambda = -\delta$ i otrzymujemy

$$x = A_1 e^{\lambda t} + A_2\, t\, e^{\lambda t} = e^{-\delta t}(A_1 + A_2 t) \quad .$$

Oscylator usiłuje wykonać wahnięcie żwawiej, niż w przypadku nadtłumienia, jednak wyraz tłumiący pokonuje funkcję liniową w nawiasie znacznie szybciej, niż wykładniczą przy nadtłumieniu i w rezultacie, następuje jeszcze szybsze wytłumienie ruchu (cf. grafika).

2.2.c. Podtłumienie (underdamping): $\delta^2 < \omega_0{}^2$

Obecnie wyrażenie pod pierwiastkiem jest ujemne, a więc

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2} = i\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} =: i\,\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \quad .$$

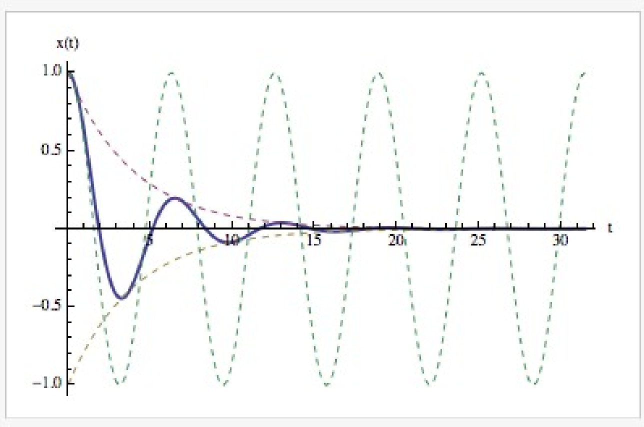
W konsekwencji, $\lambda = -\delta \pm i\,\omega$, i nasze rozwiązanie na x przybiera postać zespoloną (przy czym czynnik tłumiący jest cały rzeczywisty, a części urojone występują tylko w nawiasie – w zespolonych amplitudach *A* oraz explicité w eksponensach):

$$x = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right) \quad .$$

Z zadowoleniem obserwujemy, że całe wyrażenie w nawiasie zostało już przez nas rozwiązane w przypadku 2.1. i stanowi zwyczajny niełumiony oscylator harmoniczny. To samo żądanie, co wówczas, na znikanie części urojonej rozwiązania, prowadzi nas do formuły

$$x = e^{-\delta t} C \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

Mamy więc klasyczny oscylator o zmniejszonej przez tłumienie częstości $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$ w stosunku do naturalnej, i z wygaszaniem amplitudy drgań przez funkcję tłumienia $e^{-\delta t}$, która zmniejsza sukcesywnie amplitudę do zera. Warto odnotować, że częstość pozostaje cały czas taka sama.



Autor artykułu: Marek Pietrachowicz.